中华人民共和国教育部 主管
北京师范大学 主办
北京师范大学出版集团 承办

2019·12

上半月刊 总第317期

教育部优秀科技期刊
教育类中文核心期刊(2000年版)

高中数理化

卢嘉锡题

本期编审
数学 朱恒元
物理 李 勋
化学 袁廷新

9 771007 831195 12>

邮发代号：82-656

高中数理化

2019/12上 （总第317期）

中华人民共和国教育部 主管
北京师范大学 主办
北京师范大学出版集团 承办

北京师范大学出版集团期刊社
社 长：姜 钰
副 社 长：曹 巍 陈 雄
综合办公室：谭苗苗 翟冰冰 颜贺华

《高中数理化》杂志
主 编：刘文彪
编辑部主任：[illegible]
编 辑 部：曾慧楠 李彦玲 于亚娜
出 版：北京师范大学出版社（集团）有限公司
编 辑：《高中数理化》编辑部
地 址：北京师范大学科技楼A区220室
电 话：010－58807851
网 址：www.51ga[illegible]
投稿邮箱：tougao2006@sina.com（上半月）
gzslh2010@163.com（下半月）
刊 号：CN 11－3866/G4
ISSN 1007－8312

国内总发行：[illegible]
邮发代号：82－656
订 阅 处：全国各地邮局
出刊日期：上半月每月1日
下半月每月15日
定 价：12.00元/期
开户名称：北京师范大学出版社（集团）有限公司
开 户 行：北京农村商业银行北太平庄支行
账 号：[illegible]
印 刷：北京京师印务有限公司
网络合作伙伴 新浪考试

目 次

专栏

高考·自招

知识·方法

巧借平面几何性质，解答立体几何问题

◇ 甘肃　李建明

空间几何图形都是由平面几何图形构成的，如棱锥是由一个多边形和多个三角形构成的，棱柱是由两个全等的多边形和多个平行四边形构成的，等等.因此，在立体几何问题的处理中往往需要借助平面几何图形的性质来寻找问题的切入点，下面针对平面几何图形的性质在立体几何问题中的应用进行举例说明.

1　三角形的性质

1.1　三角形的中位线

线面平行与面面平行是空间中的两种重要的平行关系，但不论哪种平行关系的判定都是从线线平行入手，因此寻找平面图形中的线线平行关系是解题的关键.其中构造三角形的中位线，利用中位线的性质是得出线线平行的重要方式.

例1　如图1，四棱锥 $A\text{-}BCDE$ 的底面 $BCDE$ 为菱形，侧面 ABE 为等边三角形，且侧面 $ABE\perp$ 底面 $BCDE$，若 O,F 分别为 BE,DE 的中点.

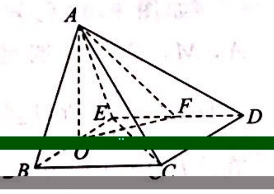

图1

(1)求证：$AO\perp CD$；

(2)侧棱 AC 上是否存在点 P，使得 $BP/\!/$平面 AOF？若存在，求出 $\frac{AP}{PC}$ 的值；若不存在，请说明理由.

解析　(1)略；

(2)如图2所示，设 CE 与 BD,OF 的交点分别为 M,N，连接 AN，PM.因为四边形 $BCDE$ 为菱形，O,F 分别为 BE，DE 的中点，所以 $\frac{NM}{MC}=\frac{1}{2}$.设 P 为 AC 上靠近点 A 的三等分点，则 $\frac{AP}{PC}=\frac{NM}{MC}=\frac{1}{2}$，所以 $PM/\!/AN$.因为 $AN\subset$平面 AOF，$PM\not\subset$平面 AOF，所以 $PM/\!/$平面 AOF.因为 $BD/\!/OF$，$OF\subset$平面 AOF，$BD\not\subset$平面 AOF，所以 $BD/\!/$平面 AOF，即 $BM/\!/$平面 AOF.因为 $BM\cap PM$ 于 M，所以平面 $BMP/\!/$平面 AOF.因为 $BP\subset$平面 BMP，所以 $BP/\!/$平面 AOF.

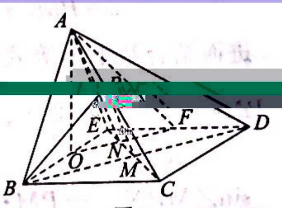

图2

综上所述，侧棱 AC 上存在点 P，使得 $BP/\!/$平面 AOF，且 $\frac{AP}{PC}=\frac{1}{2}$.

点评　构造中位线需要寻找中点，可以直接选取某一线段的中点，也可构造中点(如利用平行四边形的对角线互相平分等).

1.2　等腰三角形三线合一

线线垂直关系是判定空间中线面垂直与面面垂直的重要依据.在等腰三角形中顶角的平分线、底边上的中线与底边上的高线重合，准确利用这一性质，可迅速构造线线垂直关系，从而找到解题的突破口.

例2　如图3，四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=AC$.过点 A 的平面与棱 PB,PC,PD 分别交于点 E,F,G(E,F,G 与棱的端点均不重合).

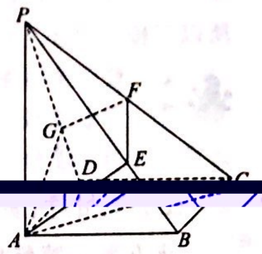

图3

(1)求证：平面 $PAB\perp$ 平面 PBC；

(2)若 $PC\perp$平面 $AEFG$，求 $\frac{PF}{PC}$ 的值.

解析　(1)略；

(2)因为 $PA=AC$，所以 $\triangle PAC$ 为等腰三角形.因为 $PC\perp$平面 $AEFG$，$AF\subset$平面 $AEFG$，所以 $PC\perp AF$.由等腰三角形"三线合一"的性质，可知点 F 为 PC 的中点，所以 $\frac{PF}{PC}=\frac{1}{2}$.

点评　由线面垂直可知线与面内的任意直线垂直，从而结合等腰三角形三线合一的性质找到动点所在的位置.

1.3　直角三角形的判定

直角三角形主要的性质有：勾股定理、斜边上的中线等于斜边的一半、两个锐角互余等.在判断两条相交的直线是否垂直时，若这两条直线与另外一条直线围成的三角形三边满足勾股定理的逆定理，则可得出两线的垂直关系.

例3　如图4所示，在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$CA=CB$，$AB=AA_1$，$\angle BAA_1=\frac{\pi}{3}$.

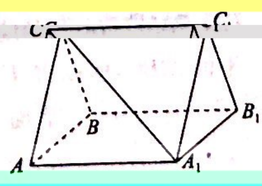

图4

(1)证明：$AB\perp A_1C$；

(2)设 $AB=CB=2$，$A_1C=\sqrt{6}$，求三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 的体积。

解析 (1)略。

(2)如图5所示。取 AB 的中点 D，连接 A_1D，CD，A_1B。由已知条件，可知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABA_1$ 均是边长为2的等边三角形，所以 $CD=A_1D=\sqrt{3}$。又因为 $A_1C=\sqrt{6}$，所以 $CD^2+A_1D^2=A_1C^2$，所以 $CD\perp A_1D$。又因为 $A_1D\perp AB$，$CD\cap AB$ 于 D，所以 $A_1D\perp$ 平面 ABC，A_1D 为三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 的高。因为 $S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$，所以三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 的体积为3。

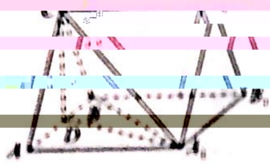

图5

点评 欲证某两条直线垂直，应有意识地去验证这两条直线与第三条直线所围成的三角形三边满足勾股定理的逆定理，从而得到所需的垂直关系。

2 正方形的性质

正方形是特殊的平面图形之一，正方形的性质除了四条边相等，四个角均为直角，对角线相等、垂直且平分、对角线是边长的$\sqrt{2}$倍等性质以外，还具有如下性质：如图6所示，E，F 分别是正方形 $ABCD$ 的中点，易证 $AE\perp BF$。

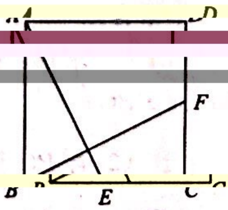

图6

例4 如图7所示，正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2，AA_1 的中点为 M，点 P 在侧面 ABB_1A_1 内，若 $D_1P\perp CM$，则 PB 的最小值为________。

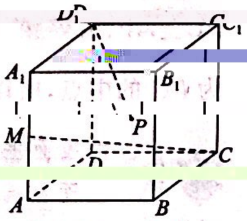

图7

解析 如图8所示，设 AB 的中点为 E，连接 BM，B_1E，D_1B_1，D_1E，D_1P，利用上述正方形的性质可知 $B_1E\perp BM$，而 $B_1E\perp BC$，$BM\cap BC$ 于 B，故 $B_1E\perp$ 平面 MBC，所以 $B_1E\perp CM$。

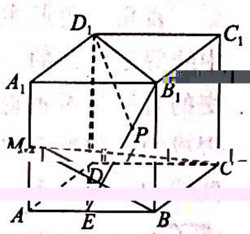

图8

又 $D_1B_1\perp$ 平面 A_1ACC_1，$CM\subset$ 平面 A_1ACC_1，所以 $D_1B_1\perp CM$，而 $D_1B_1\cap B_1E$ 于 B_1，所以 $CM\perp$ 平面 D_1B_1E，所以 $D_1P\subset$ 平面 D_1B_1E，即点 $P\in B_1E$。所以 PB 的最小值即为点 B 到 B_1E 的距离，进一步可求得 $PB_{min}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$。

点评 本题从题目的已知条件来看，具备应用上述正方形性质的条件，所以在侧面正方形中构造线线垂直关系是使问题顺利求解的关键。由已知的性质、定理入手添加辅助线，是解答立体几何问题的重要方式。

3 圆形的性质

到定点的距离为定值的点的轨迹为圆，与圆有关的性质较多，如直径所对的圆周角为直角，同弧所对的圆心角是圆周角的2倍，圆内接四边形的内对角互补，以及正弦定理等。

例5 在四棱柱 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，侧棱 $AA_1\perp$ 底面 $ABCD$，$AA_1=2$，底面四边形 $ABCD$ 的边长均大于2，且 $\angle DAB=\frac{\pi}{4}$，M，N 分别是底面 $ABCD$ 内的动点 P 在 AB，AD 上的射影，若 $|PA|=2$，则三棱锥 D_1-PMN 体积的最大值为________。

解析 欲使三棱锥 D_1-PMN 体积最大，即使 $S_{\triangle PMN}$ 最大。由 $|PA|=2$，可知点 P 在以 A 为圆心的圆上。

如图9，由已知条件易知 A，M，P，N 四点共圆，而 $\angle DAB=\frac{\pi}{4}$，所以 $\angle MPN=\frac{3\pi}{4}$。

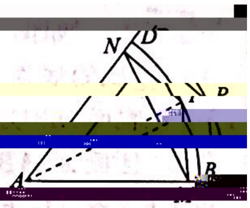

图9

在 $\triangle PMN$ 中，由正弦定理可得 $\frac{MN}{\sin\angle MPN}=2R$，$MN=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，由余弦定理可得

$$MN^2=PM^2+PN^2-2PM\cdot PN\cos\angle MPN,$$

$$2=PM^2+PN^2+\sqrt{2}PM\cdot PN,$$

进而结合基本不等式得 $(2+\sqrt{2})PM\cdot PN\leqslant 2$，$PM\cdot PN\leqslant\frac{2}{2+\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}$。所以 $S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}PM\cdot PN\cdot\sin\angle MPN=\frac{\sqrt{2}}{4}PM\cdot PN\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}\times(2-\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$。因此，$V_{D_1\text{-}PMN}=\frac{1}{3}\times 2\times\frac{\sqrt{2}-1}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{3}$。

综上，三棱锥 D_1-PMN 体积的最大值为 $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$。

点评 本题求解中两次构造了圆，一次是由 $|PA|=2$ 构造 A 为圆心，半径为2的圆；另一次是利用直径所对的圆周角为直角，构造了以 AP 为直径的圆。最后，再结合三角形中的正弦、余弦定理及基本不等式求得最值。

4　菱形的性质

菱形的四条边相等，对角线互相垂直且平分，这一性质往往是寻找立体几何中线线垂直的重要条件。另外某些特殊的几何体往往可视为由特殊的平面图形折叠而成。

例 6　如图 10，四面体 $ABCD$ 的六条棱中，有五条棱的长为 1，一条棱长为 x，则四面体 $ABCD$ 体积的最大值为________.

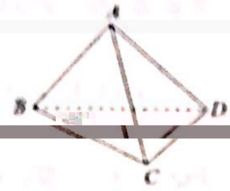

图 10

解析　根据所给几何体的特征，即一条棱长为 x，其余棱长均为 1，可将该四面体视为由边长为 1，一个内角为 60° 的菱形翻折而成，进而使问题简捷获解。

不妨设菱形为 $ACBD$，$\angle CAD=60°$，将菱形沿对角线 CD 翻折，可得题目所述四面体，且 $AB=x$。易知当平面 ACD 与平面 BCD 垂直时，四面体 $ABCD$ 的体积取得最大值 $\frac{1}{8}$，此时 $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

点评　本题求解中将空间问题平面化，即结合四面体 $ABCD$ 的特征，将其视为由特殊的菱形翻折而成，从而利用菱形的性质求解。

5　平行四边形的性质

平行四边形的性质包括对边平行且相等、对角线互相平分等。在立体几何问题中往往需要先判定一个四边形为平行四边形，再利用平行四边形的性质得到线线平行关系。

例 7　如图 11 所示，在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，AA_1B_1B 为正方形，BB_1C_1C 为菱形，$\angle BB_1C_1=\frac{\pi}{3}$，平面 $AA_1B_1B\perp$ 平面 BB_1C_1C.

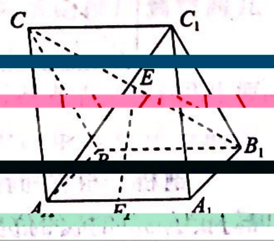
图 11

(1) 求证：$B_1C\perp AC_1$；

(2) 设点 E，F 分别是 B_1C，AA_1 的中点，试判断直线 EF 与平面 ABC 的位置关系，并说明理由。

解析　(1) 略；

(2) 如图 12，设 G 为 BC 的中点，连接 GE，GA。因为 E 是 B_1C 的中点，所以 $GE\parallel BB_1$，且 $GE=\frac{1}{2}BB_1$。因为 F 是 AA_1 的中点，所以 $AF=\frac{1}{2}AA_1$.

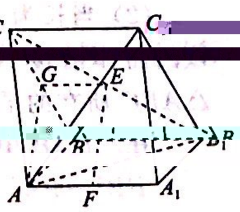
图 12

在正方形 ABB_1A_1 中，$AA_1\parallel BB_1$，$AA_1=BB_1$，所以 $GE\parallel AF$，且 $GE=AF$，所以四边形 $GEFA$ 为平行四边形，所以 $EF\parallel GA$。因为 $EF\not\subset$ 平面 ABC，$GA\subset$ 平面 ABC，所以 $EF\parallel$ 平面 ABC.

点评　本题求解中结合三角形中位线的性质，利用平行四边形判定定理：一组对边平行且相等的四边形为平行四边形，进而再利用平行四边形的性质来说明另外一组对边平行，从而得到线线平行关系。

6　矩形的性质

矩形的性质，主要包括四个角都是直角，对边平行且相等，对角线平分且相等等。

例 8　如图 13 所示，三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，$PC\perp AB$，D,E,F,G 分别为 AP,AC,BC,PB 的中点。

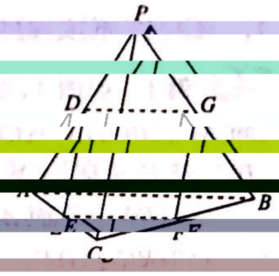
图 13

(1) 求证：四边形 $DEFG$ 为矩形；

(2) 是否存在点 Q，到三棱锥 $P\text{-}ABC$ 六条棱的中点的距离相等？说明理由。

解析　(1) 由 D,E,F,G 分别为 AP,AC,BC,PB 的中点，可得 $DE\parallel PC$，$DE=\frac{1}{2}PC$，$GF\parallel PC$，$GF=\frac{1}{2}PC$，所以四边形 $DEFG$ 为平行四边形。又因为 $PC\perp AB$，所以 $DE\perp EF$，所以四边形 $DEFG$ 为矩形。

(2) 由第 (1) 问可知当点 Q 为矩形 $DEFG$ 对角线的交点时，点 Q 到点 D,E,F,G 的距离相等。

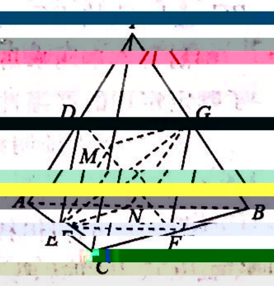
图 14

如图 14，设 PC 的中点为 M，AB 的中点为 N，连接 EG,EN,EM,NG,MG，同第 (1) 问的证明方法，可得四边形 $EMGN$ 为矩形，且与矩形 $DEFG$ 有共同的对角线 EG，所以当点 Q 为 EG 的中点时，其到三棱锥 $P\text{-}ABC$ 六条棱的中点距离相等。

点评　本题的求解中应用了矩形的性质，即矩形对角线相等且互相平分的性质，则对角线的交点到各顶点的距离相等。

（作者单位：甘肃省兰州市兰州现代职业学院）